

TD 3 : Espaces quadratiques

Exercice 1

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n . On fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

1. Soit q une forme quadratique sur E et $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de q dans la base précédente. Montrer que

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j.$$

2. Réciproquement, on se donne une application $Q : K^n \rightarrow K$ définie par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Montrer que l'application $\sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto Q(x_1, \dots, x_n)$ définit une forme quadratique sur E dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est la matrice A ayant pour coefficients les $a_{i,j}$ au dessus (au sens large) de la diagonale, et complétée ensuite sous la diagonale de manière à en faire une matrice symétrique.

Exercice 2

On considère l'application définie sur l'espace $E = \mathbb{R}[X]_{<3}$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 par la formule :

$$q(P) = \int_0^1 P'(t)P(1-t)dt + P(0)P(1).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et expliciter sa forme polaire.
2. Déterminer la matrice de q dans la base $(1, X, X^2)$ de E .
3. Calculer le discriminant de q . Est-elle dégénérée ?
4. La forme q possède-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?

Exercice 3

On dit qu'une forme quadratique q sur E *représente* l'élément $\alpha \in K^\times$ s'il existe $x \in E$ tel que $q(x) = \alpha$.

1. Montrer que deux formes quadratiques isométriques représentent exactement le même ensemble de scalaires.
2. Montrer que si q représente $\alpha \in K^\times$, alors il existe $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tels que q soit isométrique à :

$$\alpha x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2.$$

Exercice 4

Soit $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une famille de représentants de $K^\times / (K^\times)^2$. Montrer que toute forme quadratique non dégénérée est équivalente à une forme quadratique de la forme :

$$\varepsilon_{i_1} x_1^2 + \varepsilon_{i_2} x_2^2 + \cdots + \varepsilon_{i_n} x_n^2.$$

Exercice 5

Soit (E, q) un espace quadratique et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

1. Montrer que $F \cap F^\perp = N(q|_F)$.
2. En déduire que si q est non dégénérée et si $F \subset E$ est un sous-espace totalement isotrope de E (*i.e.* contenu dans son cône isotrope), alors $2 \dim F \leq \dim E$.
3. Donner un exemple où il y a égalité dans l'inégalité précédente.
4. Dans le cas de la forme quadratique $q: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, dessinez le cône isotrope et les sous-espaces totalement isotropes de dimension maximale.

Exercice 6

On dit qu'un espace quadratique (E, q) de forme polaire f est un *plan hyperbolique* s'il admet une base $\{e_1, e_2\}$ formée de vecteurs isotropes, tels que $f(e_1, e_2) \neq 0$.

1. Soit (E, q) un plan hyperbolique. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La forme q est-elle dégénérée ?
2. Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré possédant un vecteur isotrope non nul x . Montrer que E contient un sous-espace F contenant x qui est un plan hyperbolique.
3. On suppose toujours que (E, q) est non dégénéré. Démontrer par récurrence que E est somme directe orthogonale de plans hyperboliques et d'un sous-espace ne contenant pas de vecteurs isotropes non nuls (on dit que c'est un sous-espace anisotrope).

Exercice 7

1. Montrer que le groupe $\mathbb{Q}^\times / (\mathbb{Q}^\times)^2$ est infini.
2. En déduire qu'il y a une infinité de classes de formes quadratiques sur un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel non nul.

Exercice 8

Montrer qu'une forme quadratique est de rang r si et seulement si elle s'écrit comme combinaison linéaire de r carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 9

Ecrire les matrices des formes quadratiques réelles suivantes dans la base canonique. Déterminer leur rang et leur signature.

1. $q(x, y, z) = 4xy - 4yz - y^2 - z^2$.
2. $q(a, b, c) = b^2 - 4ac$
3. $q(x, y, z) = y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz - 2xz$.

Exercice 10

Soit q une forme quadratique réelle non dégénérée de signature $(p, n - p)$.

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $q(x) = 1$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p}$.
2. Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$.

Exercice 11

Soient $(E, q), (E', q')$ des espaces quadratiques réels de dimension finie, de formes polaires respectives f, f' .

1. Montrer que l'on peut définir une structure d'espace quadratique sur $E \otimes E'$ en posant $g(x \otimes x', y \otimes y') = f(x, y)f'(x', y')$.
2. Déterminer le rang et la signature de $E \otimes E'$ en fonction de ceux de E et E' .

Exercice 12

Soit K un corps fini de cardinal q impair.

1. En considérant l'endomorphisme de groupe $x \mapsto x^2$ défini sur $K^\times$, démontrer que $(K^\times)/(K^\times)^2$ est d'ordre 2.
2. Combien y a-t-il de carrés dans K ?
3. En déduire que pour $a, b, c \in K$ tous non nuls, l'équation $ax^2 + by^2 = c$ possède au moins une solution non nulle dans K^2 .
4. En utilisant l'exercice 3, en déduire que toute forme quadratique non dégénérée sur K^2 est isométrique à $x^2 + \beta y^2$ pour un certain $\beta \in K^\times$.
5. Soit $\alpha \in K^\times$ non carré, et soit (E, q) un espace quadratique de dimension n , non dégénéré sur K . Montrer que q est isométrique à $x_1^2 + \dots + x_n^2$ ou à $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \alpha x_n^2$.
6. Dans les deux cas précédents, donner la valeur du discriminant de q . En déduire que deux formes quadratiques non dégénérées sur E sont isométriques si et seulement si elles ont même discriminant.

Exercice 13

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré sur $\mathbb{Q}$.

1. On suppose que q représente α . Montrer que la famille $q^{-1}(\{\alpha\})$ engendre E .
2. Montrer que $q^{-1}(\{\alpha\})$ est vide ou infini.
3. Montrer que

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est infini.

Exercice 14

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré. On rappelle qu'un sous-espace totalement isotrope de E est un sous-espace vectoriel de E constitué de vecteurs isotropes.

1. Expliquer pourquoi tout sous-espace totalement isotrope est contenu dans un sous-espace totalement isotrope maximal pour l'inclusion.
2. Soient F, F' deux sous-espaces totalement isotropes de E . On suppose que $\dim F \leq \dim F'$. Montrer qu'il existe une isométrie u de E telle que $u(F) \subset F'$.
3. En déduire que le groupe des isométries de E opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de E , et qu'ils ont donc tous la même

dimension.

Exercice 15

Soit (E, q) un espace quadratique non dégénéré, que l'on suppose isométrique à la somme directe orthogonale :

$$\left(\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbf{H}_i \right) \oplus F,$$

avec F anisotrope et les $\mathbf{H}_i$ sont des plans hyperboliques.

1. Montrer que E a un sous-espace totalement isotrope maximal de dimension r .
2. En déduire que la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux de E est égale à son indice d'isotropie.
3. On suppose que E est un espace quadratique réel (non dégénéré) de signature (s, t) . Montrer que son indice d'isotropie est $\min\{s, t\}$.
4. On suppose que E est un espace quadratique complexe (non dégénéré) de dimension n . Déterminer son indice d'isotropie.

Exercice 16

D'après le théorème de Witt, étant donné (E, q) non dégénéré de dimension finie, il existe un espace quadratique anisotrope, unique à isométrie près, tel que $E = F \oplus H$ où H est un espace hyperbolique.

On appelle *partie anisotrope* de E la classe d'isométrie de sous-espace de E . Deux espaces quadratiques sont dit Witt-équivalents s'ils ont la même partie anisotrope.

1. Montrer que la Witt-équivalence est une relation d'équivalence, et que deux espaces quadratiques isométriques sont Witt-équivalents.
2. Montrer que l'ensemble des classes de Witt-équivalence d'espaces quadratiques non dégénérés de dimension finie sur un corps K fixé, muni de l'opération induite par la somme directe orthogonale, forme un groupe abélien.

Ce groupe s'appelle le *groupe de Witt* de K , on le note $W(K)$.

3. Montrer que $W(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $W(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$.
4. Déterminer $W(\mathbb{F}_p)$ pour p premier impair (on pourra distinguer les cas selon que -1 est ou non un carré dans $\mathbb{F}_p$).