

Ex 3 Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ unitairement semblables.

$$\exists U \in U_n(\mathbb{C}) \text{ tq } U^* A U = B \quad (\Leftrightarrow AU = UB)$$

veut dire $U^* U = Id$

Écrivons $U = P + iQ$ où $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$

Alors $AU = UB \Rightarrow AP + iAQ = PB + iQB$

donc en identifiant les parties réelles et imaginaires,

$$AP = PB \text{ et } AQ = QB.$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad A(P + tQ) = (P + tQ)B.} \quad (*)$

et on aimerait montrer qu'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tq
 $P + tQ \in GL_n(\mathbb{R})$.

C'est le cas car le polynôme $\det(P + XQ)$ est non nul (regarder son évaluatⁿ en i : c'est $\det(P + iQ) = \det(U) \neq 0$.)

Donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tq $P + tQ \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $\boxed{R := P + tQ}$

D'après (*), on a $AR = RB$ ie $\boxed{A = RBR^{-1}.} \quad (**)$

À CESTADE. on a juste montré que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$, mais pas orthogonalement semblables, car R n'a pas de raison a priori d'appartenir au groupe orthogonal.

Mais quel théorème fait apparaître le groupe orthogonal là où il n'y avait qu'une matrice inversible ??

~ LA DÉCOMPOSITION POLAIRE ~

On écrit donc $R = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{L}_n^{++}(\mathbb{R})$.

La relation (xx) devient alors

$$A = OSB(OS)^{-1} = OS \underbrace{BS^{-1}}_{\text{}} O^{-1}$$

Pour conclure, on aimerait qu'il n'y ait plus S et S^{-1} ! Par exemple, si l'on arrivait à montrer que $SB = BS$, on aurait fini !

Or, si l'on se rappelle de la preuve de l'existence de la décomposition polar, S est un polynôme en tRR . On construit S comme une racine carrée de tRR en diagonalisant la matrice symétrique définie positive $({}^tRR)$.

Ainsi, il suffit plutôt de montrer que B commute avec tRR , et cela impliquera que B commute avec S , et on aura fini.

Or $\bullet A = RBR^{-1}$

$\bullet {}^tA = R {}^tB R^{-1}$ (même preuve que pour les transposées)

$$\text{on a } A = UBU^* \Rightarrow A^* = {}^tA = \underbrace{(UBU^*)^*}_{A \in M_n(\mathbb{R})} = \underbrace{(U^*)^*}_{B \in M_n(\mathbb{R})} B^* U^* = U {}^tB U^*$$

$$\text{donc } {}^tAU = U {}^tB \Rightarrow {}^tA \underbrace{(P+{}^tQ)}_R = \underbrace{(P+{}^tQ)}_R {}^tB$$

D'ai $A = {}^t({}^tA)$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ RBR^{-1} & & {}^t(R^{-1}) B {}^tR \end{array}$$

et cette égalité donne le fait que B commute avec tRR .